Olympiade Francophone de Mathématiques

Sixième édition

22 mars 2025

Épreuve Senior

Problème 1. Soit $(a_1, a_2, \ldots)$ une suite d'entiers strictement positifs vérifiant la propriété suivante : pour tous entiers strictement positifs $k < \ell$, pour tous entiers $m_1, \ldots, m_k$ distincts et pour tous entiers $n_1, \ldots, n_\ell$ distincts,

$$a_{m_1} + \ldots + a_{m_k} \leqslant a_{n_1} + \ldots + a_{n_\ell}.$$

Montrer qu'il existe deux entiers N et b tels que, pour tout $n \geqslant N$, $a_n = b$.

Solution :

Tout d'abord, montrons que la suite (a_n) est bornée. Soit $n \geqslant 3$ un entier. Alors d'après l'hypothèse, $a_n \leqslant a_1 + a_2$. Comme de plus $a_1 \leqslant a_1 + a_2$ et $a_2 \leqslant a_1 + a_2$, on a $0 \leqslant a_n \leqslant a_1 + a_2$ pour tout entier n, la suite (a_n) est donc bien bornée.

Comme la suite (a_n) est en plus à valeurs entières, elle prend un nombre fini de valeurs distinctes. Pour montrer le résultat de l'énoncé, il suffit de montrer qu'il n'existe pas deux valeurs distinctes qui sont prises une infinité de fois par la suite. Suppons au contraire qu'il existe $b < c$ deux entiers tels qu'il existe une infinité de termes de la suite valant a et une autre infinité de termes de la suite valant b. Prenons $a_{m_1}, \ldots, a_{m_{b+1}}$ des termes de la suite égaux à c et $a_{n_1}, \ldots, a_{n_{c+1}}$ des termes de la suite égaux à b. D'après l'hypothèse de l'énoncé,

$$(b+1)c = a_{m_1} + \ldots + a_{m_{b+1}} \leqslant a_{n_1} + \ldots + a_{n_{c+1}} = (c+1)b,$$

de sorte que $c \leqslant b$, ce qui donne la contradiction recherchée. Ainsi, exactement une valeur b est prise une infinité de fois par la suite a_n.

Si l'énoncé était faux, on aurait, pour tout N, un entier $n \geqslant N$ tel que $a_n \neq b$ et ainsi une infinité de termes de la suite différents de b. Comme (a_n) prend un nombre fini de valeurs distinctes, d'après le principe des tiroirs, parmi les termes différents de b, on en trouverait une infinité prenant la même valeur c, ce qui contredit ce qui a été établi plus haut. Ceci conclut le problème.

Problème 2. Soit $n \geqslant 2$ un entier. On considère une grille carrée de taille $2n \times 2n$ et découpée en $4n^2$ carrés unités. La grille est dite *équilibrée* si :

- Chaque case contient un nombre valant $-1, 0$ ou 1.
- La valeur absolue de la somme des nombres de la grille ne dépasse pas $4n$.

Déterminer, en fonction de n, le plus petit entier $k \geqslant 1$ tel que toute grille équilibrée contient toujours un carré de taille $n \times n$ dont la valeur absolue de la somme des n^2 cases est inférieure ou égale à k.

Réponse : $k = n$.

Le problème contient deux parties : dans un premier temps, on montre que si k vérifie la propriété de l'énoncé, alors $k \geqslant n$. Dans un second temps, on montre que $k = n$ vérifie la propriété.

Si k vérifie la propriété, alors $k \geqslant n$.

On donne une configuration dans laquelle tout carré de taille n a une somme égale à n :

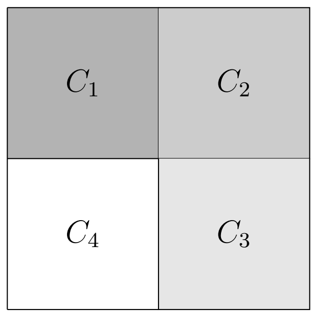
1	1	1	1	1	1	1	1
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0

Considérons une grille $2n \times 2n$ dans laquelle on inscrit un 1 dans chaque case de la ligne 1 et dans chaque case de la ligne $n+1$. La somme des cases de la grille vaut $4n$ et si l'on choisit un carré quelconque de taille $n \times n$, il intersecte soit la ligne 1 soit la ligne $n+1$, mais pas les deux. La somme des cases de tout carré de taille $n \times n$ est donc exactement n. Ainsi $k \geqslant n$.

$k = n$ **vérifie la propriété.**

Dans la suite, on dira qu'un carré est *positif* si la somme de ses cases est supérieure strictement à n et qu'il est *négatif* si la somme de ses cases est strictement inférieure à $-n$. Dans la suite, on suppose par l'absurde que l'énoncé est faux. Les carrés $n \times n$ de la table sont donc tous positifs ou négatifs.

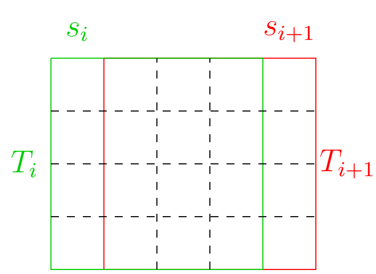
On découpe le carré $2n \times 2n$ en quatre carrés de taille $n \times n$ disjoints.



Notons C_1, C_2, C_3 et C_4 les quatre carrés obtenus. On suppose, quitte à inverser les signes de toutes les cases, que C_1 est positif. On note T_i le carré formé par les n premières lignes et les colonnes dont le numéro va de i à $i + n - 1$ (on a donc $T_1 = C_1$ et $T_n = C_2$). On montre par récurrence sur i que T_i est positif pour tout i.

Initialisation : $T_1 = C_1$ est positif.

Hérédité : On suppose que T_i est positif, avec $i \geqslant 1$ fixé.



Notons s_i la somme des cases de la colonne appartenant au carré T_i mais pas au carré T_{i+1} (ces cases sont sur la $i-$ème colonne du carré) et s_{i+1} la somme des cases de la colonne appartenant au carré T_{i+1} mais pas au carré T_i (ces cases sont sur la $i + n - 1-$ème colonne du carré). Notons aussi S_i la somme des cases de T_i et S_{i+1} la somme des cases de T_{i+1}. Puisque les cases sont de valeur absolue inférieure à 1, on a

$$|S_{i+1} - S_i| = |s_{i+1} - s_i| \leqslant 2n.$$

Comme T_i est positif, $S_i > n$. On déduit par inégalité triangulaire que $S_{i+1} \geqslant S_i - 2n > -n$. Donc T_{i+1} n'est pas négatif et T_{i+1} est positif, ce qui achève la récurrence.

On déduit que C_2 est également positif. De la même façon, on déduit que si C_2 est positif alors C_3 est positif et que si C_3 est positif alors C_4 est positif. Donc C_1, C_2, C_3 et C_4 sont tous les quatre positifs. Mais alors la somme des cases est supérieure à $4(n+1) > 4n$, ce qui contredit l'énoncé, d'où la conclusion.

Remarque : D'autres configurations sont possibles pour la construction, telles que

0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0

0	0	0	1	0	0	0	1
0	0	1	0	0	0	1	0
0	1	0	0	0	1	0	0
1	0	0	0	1	0	0	0
0	0	0	1	0	0	0	1
0	0	1	0	0	0	1	0
0	1	0	0	0	1	0	0
1	0	0	0	1	0	0	0

1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1
-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1
-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
0	0	0	0	0	0	0	0

Olympiade Francophone de Mathématiques

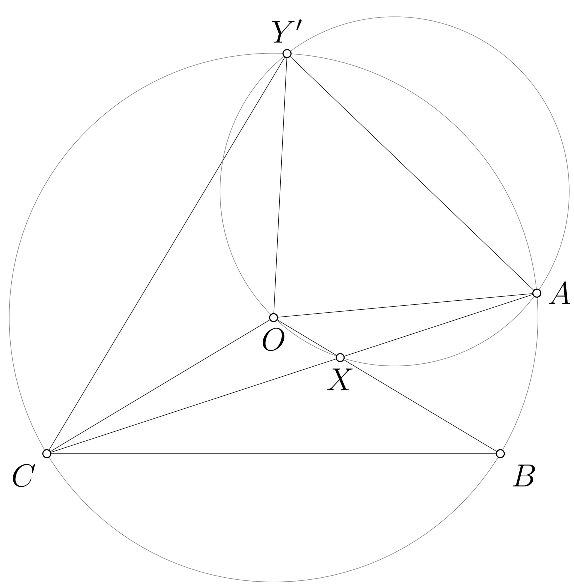
Sixième édition

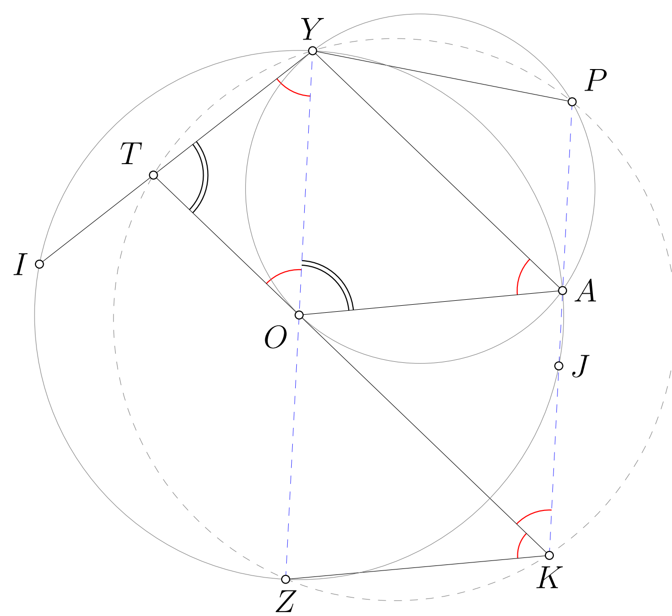
22 mars 2025

Problème 3. Soit ω un cercle de centre O. Soient B et C deux points fixes du cercle ω et soit A un point variable sur le cercle ω. On note X le point d'intersection des droites (OB) et (AC) et on suppose que $X \neq O$. On note Ω le cercle circonscrit au triangle AOX. Soit Y le second point d'intersection de Ω avec ω. La tangente à Ω en Y recoupe ω en I. La droite (OI) recoupe ω en J. La médiatrice du segment $[OY]$ recoupe la droite (YI) en T et la droite (AJ) recoupe Ω en P. On note Z le second point d'intersection du cercle circonscrit au triangle PYT avec ω.

Montrer que, lorsque le point A varie, les points Y et Z restent fixes.

Solution 1 :





Étape 1 : Y est le symétrique du point C par rapport à (OB). Y est donc fixe lorsque A varie.

Notons Y' le symétrique du point C par rapport à (OB). Il suffit de montrer que Y', A, X et O sont cocycliques.

Puisque (OB) est l'axe de symétrie de $[Y'C]$, on a $\widehat{Y'OB} = \widehat{COB}$, si bien que d'après le théorème de l'angle au centre,

$$2\widehat{Y'OB} = \widehat{Y'OB} + \widehat{COB} = 360° - \widehat{Y'OC} = 360° - 2\widehat{Y'AC} = 2(180° - \widehat{Y'AC}),$$

ce qui, après simplification par 2 et en utilisant la définition du point X, donne $\widehat{Y'OX} = 180° - \widehat{Y'AX}$. Ainsi $Y' = Y$ est fixe lorsque A varie.

Notons Z le symétrique de Y par rapport à O. Le point Z est aussi fixe lorsque A varie et il appartient à ω. Le but des étapes suivantes est de montrer que Z appartient à $\mathcal{C}_{PYT}$, ce qui permet de conclure.

Étape 2 : $(YZ) \mid\mid (AJ)$.

Notons que par le théorème de l'angle tangent, $\widehat{IYO} = \widehat{OAY}$. Les triangles IYO et YAO étant tous les deux isocèles en O, ils sont donc semblables. On a alors

$$\widehat{IOY} = \frac{1}{2}(\widehat{IOY} + \widehat{YOA}) = \frac{1}{2}\widehat{IOA} = \widehat{IJA}.$$

Les droites (AJ) et (YZ) sont donc bien parallèles.

On note K le point d'intersection des droites (TO) et (AJ).

Étape 3 : T, Y, P et K sont cocycliques.

Puisque AYO est isocèle en O,

$$\widehat{APY} = 180° - \widehat{AOY} = 2\widehat{YAO} = 2\widehat{TYO} = 180° - \widehat{YTO},$$

ce qui signifie que $\widehat{YTK} + \widehat{YPK} = 180°$, et que les points T, Y, P et K sont cocycliques.

On est ramené à montrer que Z appartient au cercle $\mathcal{C}_{KYT} = \mathcal{C}_{PYT}$.

Étape 4 : Z est le symétrique de A par rapport à (OT).

Soit Z' le symétrique de A par rapport à (OT). Puisque $OT^2 = TY^2$, d'après la réciproque de la puissance d'un point, la droite (OT) est la tangente à ω_2 en O. On a alors par le théorème de l'angle tangent,

$$\widehat{Z'OA} = 2\widehat{KOA} = 2\widehat{OYA} = 180° - \widehat{YOA},$$

de sorte que Y, O, Z' sont alignés dans cet ordre. Puisque $OY = OA = OZ'$, on a bien $Z = Z'$.

Étape 5 : Z, K, Y et T sont cocycliques.

En rappelant le parallélisme des droite (YZ) et (PK), on trouve d'après l'étape 4,

$$\widehat{ZKT} = \widehat{AKT} = \widehat{YOT} = \widehat{OYT} = \widehat{ZYT},$$

ce qui conclut le problème.

Remarque : On présente une autre façon de réaliser les étapes 2 et 3.

Étape 2 : $(YO) \parallel (AJ)$.

Par angle tangent, $\widehat{IYO} = \widehat{YAO}$. Puisque les triangles OYI et YAO sont tous deux isocèles en O, ils sont isométriques, et I est le symétrique de A par rapport à (YO). Mais alors J est le symétrique de A par rapport à la droite perpendiculaire à (OY) passant par O, et on a bien $(OY) \parallel (AJ)$.

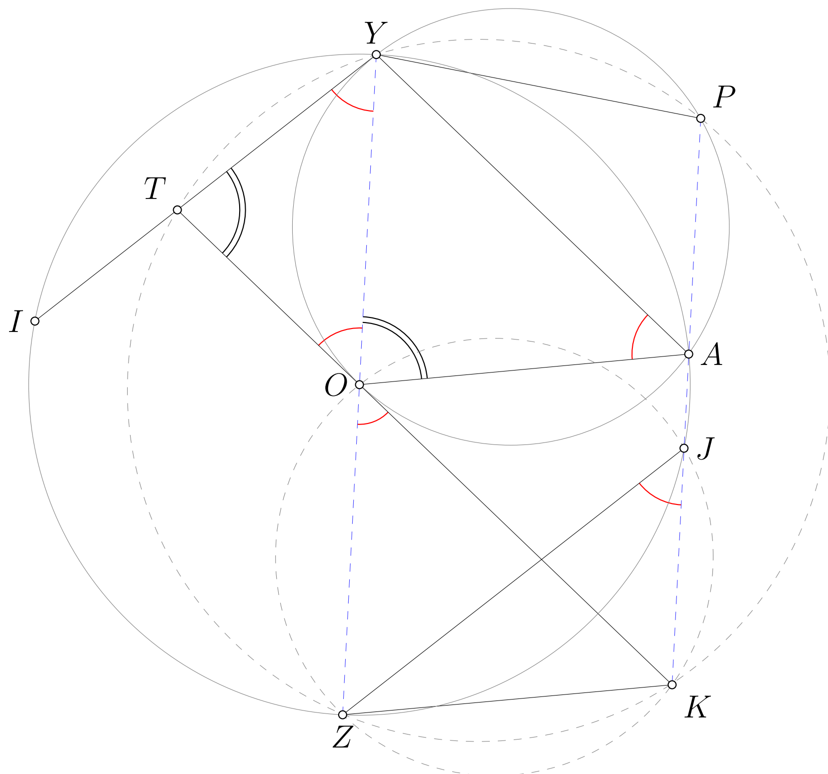
Étape 3 : Le quadrilatère $PYTK$ est cyclique.

Comme T est sur la médiatrice de $[OY]$, TYO est isocèle en T. On a alors

$$\widehat{KTY} = \widehat{OTY} = 180° - 2\widehat{TYO} = 180° - 2\widehat{YAO} = \widehat{YOA}.$$

Par ailleurs, comme $(AP) \parallel (OY)$, $\widehat{KPY} = 180° - \widehat{PYO}$, et comme $AYOP$ est un quadrilatère cyclique dans lequel $(AP) \parallel (OY)$, c'est un trapèze isocèle. En particulier, on trouve $\widehat{PYO} = \widehat{YOA}$, et on a bien $\widehat{KPY} = 180° - \widehat{KTY}$.

Solution 2
On suppose réalisées les étapes 1 et 3 de la solution 1. On notera que l'étape 3 ne nécessite pas l'étape 2. On montre une autre façon de conclure à partir de ces étapes.



Étape 4 : $KJZO$ est cyclique.
En effet, puisque TYO est isocèle en T et par angle tangentiel,

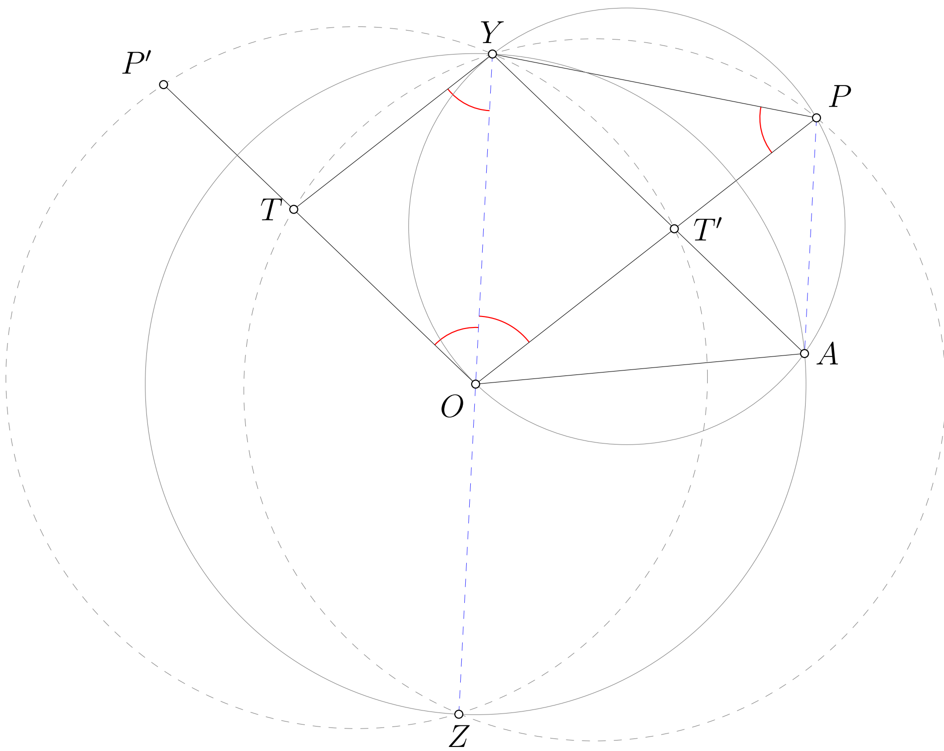
$$\widehat{KOZ} = \widehat{TOY} = \widehat{TYO} = \widehat{OAY} = \widehat{AYO} = 180^\circ - \widehat{AJZ},$$

ce qui donne que $\widehat{KOZ} = \widehat{ZJK}$, les points K, J, Z et O sont donc cocycliques.
Étape 5 : $YPKZ$ est cyclique.
De même que dans la solution 1, les triangles IOY et YOA sont isométriques. On a alors

$$\widehat{KZO} = 180^\circ - \widehat{OJK} = \widehat{IJA} = \frac{1}{2}\widehat{IOA} = \widehat{YOA} = 180^\circ - \widehat{YPA},$$

ce qui signifie que $\widehat{YPK} + \widehat{YZK} = 180^\circ$, et que les points Y, P, K et Z sont cocycliques.

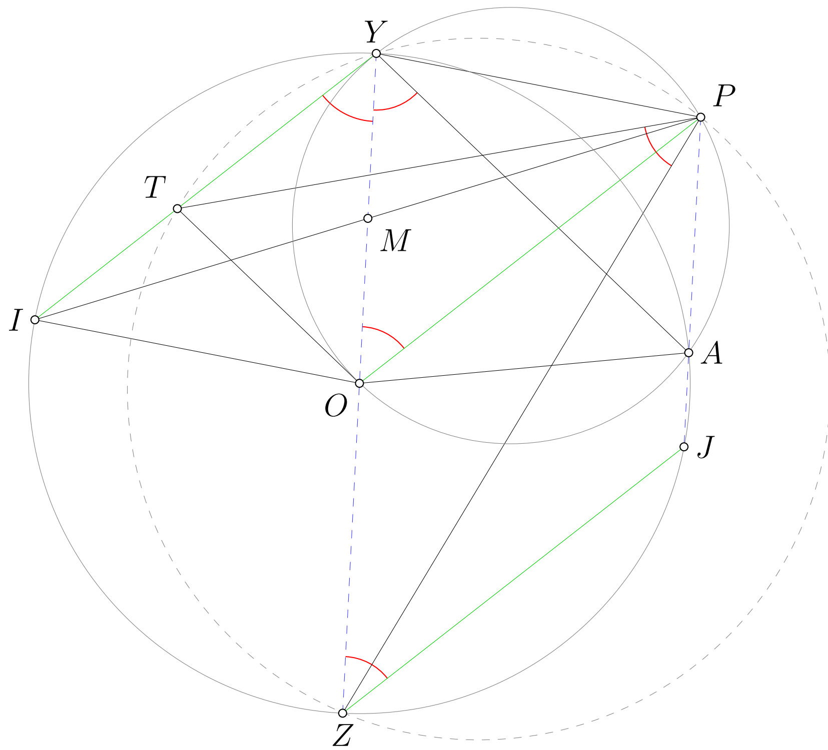
Solution 3 : Dans cette solution, on suppose établies l'étape 1 et l'étape 2 de la solution 1.



Puisque $OT = TY$, les triangles AOY et YOT sont isocèles avec $\widehat{TYO} = \widehat{YAO}$, ils sont donc semblables. De plus, d'après l'étape 2, le quadrilatère $YOAP$ est un trapèze inscriptible, c'est donc un trapèze isocèle. Les triangles YPO et OAY sont donc isométriques. On déduit que les triangles OTY et OYP sont semblables. Ceci implique notamment $OY/OP = OT/OY$, ou encore $OY^2 = OT \cdot OP$.

Soit alors T' et P' les symétriques de T et P par rapport à (OY). Puisque $\widehat{YOP} = \widehat{YOT}$, le point T' est sur (OP) et le point P' est sur (OT). Soit Z le second point d'intersection des cercles $\mathcal{C}_{PYT}$ et $\mathcal{C}_{P'YT'}$. L'inversion de centre O et de rayon OY échange T' et P ainsi que P' et T, en laissant fixe Y. Elle échange donc $\mathcal{C}_{PYT}$ et $\mathcal{C}_{P'YT'}$, de sorte que le point Z est fixe par cette inversion. Ainsi, $OZ^2 = OY^2$. De plus, puisque $\mathcal{C}_{PYT}$ et $\mathcal{C}_{P'YT'}$ sont symétriques par rapport à (OY), Z est également sur (OY), ce qui conclut.

Solution 4 : On suppose établies les étapes 1 et 2 de la solution 1 :



Étape 3 : $IYPO$ et $OPJZ$ sont des parallélogrammes isométriques.

Les quadrilatères $YAPO$ et $YAJZ$ sont inscriptibles avec deux côtés parallèles, ce sont donc des trapèzes isocèles, ce qui donne $YA = OP = ZJ$. On a de plus $\widehat{YOP} = 180° - \widehat{YAP} = \widehat{YZJ}$, ce qui implique que les droites (ZJ) et (OP) sont parallèles. Le quadrilatère $OPJZ$ est donc un parallélogramme.
D'autre part, puisque $[IJ]$ et $[YZ]$ sont des diamètres de ω, le quadrilatère $IYJZ$ est un rectangle, ce qui implique que $\overrightarrow{IY} = \overrightarrow{ZJ} = \overrightarrow{OP}$, le quadrilatère $IYPO$ est donc un parallélogramme également. Comme $\widehat{OIY} = \widehat{OZJ}$, ces parallélogrammes sont même isométriques.

Étape 4 : $Z \in \mathcal{C}_{YPT}$.

On découpe dans la suite l'angle $\widehat{TPZ}$ en $\widehat{OPZ}$ et $\widehat{OPT}$.
Soit M le milieu du segment $[OY]$. D'après l'étape 3, M est le milieu de $[IP]$.
D'une part, d'après l'étape 3 et le fait que $YAPO$ est un trapèze isocèle,

$$\widehat{OPZ} = \widehat{IPO} = \widehat{MPO}.$$

D'autre part, puisque $TY^2 = TO^2$, la droite (TO) est tangente au cercle ω_2 en O. Le point T est donc sur la symédiane issue de P dans le triangle YOP. Ainsi,

$$\widehat{TPO} = \widehat{MPY}.$$

On déduit

$$\widehat{TPZ} = \widehat{OPZ} + \widehat{TPO} = \widehat{MPO} + \widehat{MPY} = \widehat{YPO} = \widehat{TYO} = \widehat{TYZ}.$$

Les points T, Y, P et Z sont donc cocycliques, ce qui achève de montrer que les points d'intersection de ω avec le cercle $\mathcal{C}_{PTY}$ sont fixes.

Olympiade Francophone de Mathématiques

Sixième édition

22 mars 2025

Problème 4. Déterminer toutes les suites d'entiers strictement positifs $(a_1, a_2, \ldots)$ vérifiant les deux conditions suivantes :

- il existe un entier $M > 0$ tel que, pour tout indice $n \geqslant 1$, $0 < a_n \leqslant M$;
- pour tout nombre premier p et pour tout indice $n \geqslant 1$, le nombre

$$a_n a_{n+1} \ldots a_{n+p-1} - a_{n+p}$$

est un multiple de p.

Réponse : Les seules suites solutions sont les suites constantes.

Solution 1 :

Commençons par vérifier que les suites constantes sont bien solutions du problème. Soit (a_n) une suite constante égale à b. Alors a_n est bornée donc elle vérifie la première condition. Si p est un nombre premier, on a d'après le petit théorème de Fermat, pour tout indice n,

$$a_n \cdot \ldots \cdot a_{n+p-1} = b^p \equiv b = a_{n+p} \mod p.$$

La suite (a_n) vérifie donc la deuxième condition et est donc bien solution du problème.

La suite de la solution est consacrée à la preuve que toute suite vérifiant les deux conditions est bien constante.

Soit $q > M^2$ un nombre premier.

<u>Étape 1 :</u> Pour tout $i \geqslant 0$, $a_{q+i}^2 = a_i a_{q+i+1}$.

En effet, prenons i un indice quelconque. En appliquant l'hypothèse de l'énoncé au nombre premier q et aux indices i et $i+1$, on trouve

$$a_{q+i}^2 = a_{q+i} \cdot a_{q+i} \equiv (a_i \cdot \ldots \cdot a_{q+i-1}) a_{q+i} = a_i \cdot (a_{i+1} \cdot \ldots a_{q+i}) \equiv a_i a_{q+i+1} \mod q.$$

Ainsi, q divise $a_{q+i}^2 - a_i a_{q+i+1}$. Or, a_{q+i}^2 et $a_i a_{q+i+1}$ sont tous les deux compris entre 0 et M^2, de sorte que $0 \leqslant |a_{q+i}^2 - a_i a_{q+i+1}| \leqslant M^2 < q$, donc $a_{q+i}^2 = a_i a_{q+i+1}$.

<u>Étape 2 :</u> Il existe un indice i et un entier a tel que $a_n = b$ pour tout $n \geqslant i$.

Comme la suite (a_n) est une suite bornée d'entiers, il existe une valeur prise une infinité de fois par la suite.

Soit b le plus grand entier pris une infinité de fois par la suite (a_n). On dispose donc d'un indice N tel que, si $n \geqslant N$, $a_n \leqslant b$. Soit $j \geqslant N + q + 1$ un indice tel que $a_j = b$. Supposons que la suite (a_n) ne se soit pas constante à partir du rang j et notons k le plus petit indice supérieur à j tel que $a_{k+1} \neq b$. On a donc $a_{k+1} < b$. En appliquant l'étape 1 à $i = k - q$, on trouve

$$b^2 = a_k^2 = a_{k+1}a_{k-q+1} < b \cdot a_{k-q+1} \leqslant b^2.$$

On a donc une contradiction, ce qui signifie que la suite (a_n) est constante à partir du rang i.

Étape 3 : La suite (a_n) est constante égale à b.

Supposons que cela ne soit pas le cas et prenons l'indice k maximal tel que $a_k \neq b$ (l'existence d'un tel maximum étant garantie par l'étape 2). En appliquant l'étape 1 à $i = k$, on trouve

$$a_k = \frac{a_{k+q-1}^2}{a_{k+q}} = \frac{b^2}{b} = b,$$

ce qui est absurde. La suite (a_n) est donc constante égale à b.

Solution 2 :

Dans cette solution, on propose une deuxième façon de démontrer que les seules suites solutions au problème sont les suites constantes.

Étape A : La suite (a_n) est périodique à partir d'un certain rang.

Soit $p > M$ un nombre premier. Tous les termes de la suite ont un reste non nul modulo p. L'ensemble des valeurs que les $p-$uplets $(a_n, \ldots, a_{n+p-1})$ peuvent prendre est un ensemble fini, il existe donc d'après le principe des tiroirs un $p-$uplet $(b_0, \ldots, b_{p-1})$ et deux indice i et $i+T$ tels que $(a_i, \ldots, a_{i+p-1}) = (a_{i+T}, \ldots, a_{i+T+p-1}) = (b_0, \ldots, b_{p-1})$. En particulier, $a_{j+T} = a_j$ pour tout $i \leqslant j \leqslant i+p-1$. On montre alors que $a_{j+T} = a_j$ pour tout $j \geqslant i$.

En effet, supposons que cela ne soit pas le cas et prenons j_0 le plus petit indice tel que $a_{j_0+T} \neq a_{j_0}$. On a $j_0 \geqslant i+p$. En appliquant l'hypothèse de l'énoncé successivement à $n = j_0 - p$ et $n = j_0 - p + T$, on trouve

$$a_{j_0} \equiv a_{j_0-p} \cdot \ldots \cdot a_{j_0-1} = a_{j_0-p+T} \cdot \ldots \cdot a_{j_0-1+T} \equiv a_{j_0+T} \mod p.$$

Ainsi, a_{j_0} et a_{j_0+T} sont deux entiers compris entre 1 et $p-1$ ayant le même reste modulo p, ils sont donc égaux, ce qui est une contradiction.

Ainsi, la suite est périodique de période T à partir du rang i.

Étape A bis : La suite (a_n) est périodique.

Soit T la période de l'étape 1 et $p > M$ un nombre premier. Supposons que la suite ne soit pas périodique et prenons l'indice k maximal tel que $a_k \neq a_{k+T}$ (l'existence d'un tel maximum est garantie par l'étape 1). En appliquant l'hypothèse de l'énoncé à $n = k$, on trouve

$$a_k \cdot a_{k+1} \cdot \ldots \cdot a_{k+p-1} \equiv a_{k+p} \mod p.$$

Puisque tous les termes de la suite sont non nuls et inférieurs à $p-1$, ils sont inversibles modulo p et

$$a_k \equiv a_{k+p}a_{k+1}^{-1} \cdot \ldots a_{k+p-1}^{-1} = a_{k+p+T}a_{k+1+T}^{-1} \cdot \ldots a_{k+p-1+T}^{-1} \equiv a_{k+T} \mod p,$$

où on a utilisé l'hypothèse de l'énoncé pour $n = k+T$. Ainsi, a_k et a_{k+T} sont deux entiers compris entre 1 et $p-1$ ayant le même reste modulo p, ils sont donc égaux, ce qui est une contradiction. La suite est donc bien périodique de période T.

Intermède :
Comme il existe une infinité de nombres premiers, d'après le principe des tiroirs il existe une classe r modulo T contenant une infinité de nombre premiers. Autrement dit, il existe un entier $0 \leqslant r \leqslant T-1$ tel qu'il existe une infinité de nombres premiers de la forme $kT+r$. On note

$$B = a_1 \cdot \ldots \cdot a_T.$$

Étape B : Pour tout indice n, $B^{r-1}a_{n+r}^T = a_{n+1}^T \cdot \ldots \cdot a_{n+r-1}^T$.
On fixe un nombre premier $p > M$ de la forme $p = kT + r$. On a alors $a_{n+r} = a_{n+p}$. En appliquant l'hypothèse de l'énoncé à $n+r$ et à p, on trouve

$$a_{n+r} = a_{n+p} \equiv a_n \cdot \ldots \cdot a_{n+r-1} \prod_{j=0}^{k-1} \prod_{i=0}^{T-1} a_{n+r+jT+i} = a_n \cdot \ldots \cdot a_{n+r-1} B^k \mod p.$$

En élevant à la puissance T cette égalité et en appliquant le petit théorème de Fermat,

$$a_{n+r}^T = (a_n \cdot \ldots \cdot a_{n+r-1})^T B^{kT} = (a_n \cdot \ldots \cdot a_{n+r-1})^T B^{p-r} \equiv (a_n \cdot \ldots \cdot a_{n+r-1})^T B^{1-r} \mod p.$$

En multipliant cette congruence par B^{a-1}, on obtient que tout nombre premier p de la forme $kT+r$ est un diviseur de $B^{r-1}a_{n+r}^T - a_{n+1}^T \cdot \ldots \cdot a_{n+r-1}^T$. Comme il y a une infinité de tels nombres premiers, ce nombre est nul.

Étape C : Pour tout n, $a_{n+r}^2 = a_{n+1}a_{n+r+1}$.

Soit $n \geqslant 0$. En utilisant la relation établie à l'étape 2 pour les indices n et $n+1$, on a

$$B^{r-1}(a_{n+r}^T)^2 = a_{n+1}^T \cdot \ldots \cdot a_{n+r-1}^T a_{n+r}^T = a_{n+1}^T(a_{n+2}^T \cdot \ldots \cdot a_{n+r-1}^T a_{n+r}^T) = a_{n+1}^T a_{n+r+1}^T B^{r-1}.$$

En simplifiant par B^{r-1} et en passant à la racine $T-$ème, on trouve la relation voulue.

Étape D : La suite est constante.

Soit b le maximum de la suite. Puisque la suite est périodique, il existe une infinité d'indices n tels que $a_n = b$. Supposons qu'il existe au moins un terme de la suite qui n'est pas égal à b. Alors on dispose d'un indice $n \geqslant T$ tel que $a_n = b$ et $a_{n+1} \neq b$. En appliquant l'étape 3, on trouve

$$b^2 = a_n^2 = a_{n-r+1}a_{n+1} < a_{n-r+1}b \leqslant b^2,$$

ce qui est absurde. La suite est donc constante égale à b.

Remarque 1 : Alternative aux étapes B et C : Une fois que l'on a montré que la suite est périodique, on peut également établir l'étape D de la solution 2 à partir de la relation obtenue dans l'étape 1 de la solution 1.

Remarque 2 : Alternative aux étapes 2 et 3 : Supposons avoir établi l'étape 1 pour tout nombre premier q suffisamment grand. On choisit alors deux nombres premiers $p < q$ suffisamment grands. En appliquant la relation de l'étape 1 à ces deux nombres premiers, on trouve pour tout indice $i > q$,

$$a_{i-q} = \frac{a_i^2}{a_{i+1}} = a_{i-p}.$$

En particulier, pour tout indice i, on a $a_i = a_{i+q-p}$. La suite (a_i) est donc périodique de période $q - p$. On peut donc conclure à nouveau conclure comme dans l'étape 4 en posant $r = q - p$.